KIEHTOVAA MATEMATIIKKAA

CAUCHYN FUNKTIONAALIYHTÄLÖ

Lasse Pantsar

lasse.pantsar@gmail.com

2023

Johdanto

Tässä kirjoituksessa tarkastellaan ranskalaisen matemaatikon Augustin-Louis Cauchyn (21.8.1789 – 23.5.1857) mukaan nimettyä yksinkertaista funktionaaliyhtälöä $f(x+y)=f(x)+f(y)$ ja pyritään selvittämään, millaiset reaalimuuttujan reaaliarvoiset funktiot f toteuttavat tämän kaikilla reaaliluvuilla x ja y. On helppo osoittaa, että tällaisille funktioille on $f(qx)=qf(x)$ kaikilla rationaaliluvuilla q ja kaikilla reaaliluvuilla x. Koska reaalilukuja voidaan approksimoida mielivaltaisen tarkasti rationaaliluvuilla, voi olla houkuttelevaa ajatella, että tällaisille funktioille $f(rx)=rf(x)$ on voimassa kaikilla reaaliluvuilla r ja x. Mutta tämä ei pidä paikkaansa ja osoittautuu, että funktiot, joille näin ei ole, ovat varsin mielenkiintoisia.

1. Additiivisuus ja lineaarisuus

Määritelmä 1: Funktio $\boldsymbol{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ on *additiivinen*, jos se toteuttaa *Cauchyn funktionaaliyhtälön*

$$\boldsymbol{f(x+y)=f(x)+f(y)} \tag{1}$$

kaikilla $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}$ ja kaikilla $\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}$.

Additiiviselle funktiolle f pätee siten $f(2x)=f(x+x)=f(x)+f(x)=2f(x)$ ja yleisemminkin

Lause 1: Jos funktio $\boldsymbol{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ on additiivinen, on

$$\boldsymbol{f(qx)=qf(x)} \tag{2}$$

kaikilla $\boldsymbol{q}\in\mathbb{Q}$ ja kaikilla $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}$.

Todistus: Oletetaan siis, että funktiolla $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ on ominaisuus (1).

Olkoon x mielivaltainen reaaliluku. Todistetaan täydellisellä induktiolla, että

$$f(nx)=nf(x) \tag{3}$$

kaikilla $n\in\mathbb{N}$. Ensiksikin $f(1x)=f(x)=1f(x)$, ja jos oletetaan, että $f(nx)=nf(x)$, pätee määritelmän 1 perusteella

$$f\big((n+1)x\big)=f(nx+x)=f(nx)+f(x)=nf(x)+f(x)=(n+1)f(x)$$

Seuraavaksi todetaan, että (1):n perusteella

$$f(0x)=f(0)=f(0)+f(0)-f(0)=f(0+0)-f(0)=f(0)-f(0)=0=0f(x)$$

siis

$$f(0x)=0f(x) \tag{4}$$

Jos m on negatiivinen kokonaisluku, on $-m$ luonnollinen luku ja (1):n, (3):n ja (4):n mukaan

$$f(mx)=f(mx)+f(-mx)-f(-mx)=f\big(mx+(-mx)\big)-(-m)f(x)$$

$$=f(0)+mf(x)=0+mf(x)=mf(x)$$

Näin on osoitettu, että

$$f(mx) = mf(x) \tag{5}$$

kaikilla $m \in \mathbb{Z}$ ja kaikilla $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$

Lopulta, jos $q \in \mathbb{Q}$, on $q = m/n$, missä $m \in \mathbb{Z}$ ja $n \in \mathbb{N}$ ja (5):n mukaan

$$f(qx) = f\left(\frac{m}{n}x\right) = \frac{n}{n}f\left(m\frac{x}{n}\right) = \frac{n}{n}mf\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{m}{n}nf\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{m}{n}f\left(n\frac{x}{n}\right) = \frac{m}{n}f(x) = qf(x)$$ □

Jokaisella additiivisella funktiolla f on siis ominaisuus (2), mutta toteutuuko yhtälö $f(rx) = rf(x)$ jokaiselle additiiviselle funktiolle f ja kaikille reaaliluvuille r ja x? Tämän selvittämiseksi otetaan käyttöön lineaarisen funktion käsite.

Määritelmä 2: Funktio $\boldsymbol{f}$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on *lineaarinen*, jos on olemassa $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}$ siten, että

$$\boldsymbol{f(x) = cx} \tag{6}$$

kaikilla $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$.

Nyt voidaan todistaa:

Lause 2: Funktio $\boldsymbol{f}$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on lineaarinen, jos ja vain jos

$$\boldsymbol{f(rx) = rf(x)} \tag{7}$$

kaikilla $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}$ ja kaikilla $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$.

Todistus: Oletetaan ensin, että funktio f on lineaarinen, jolloin on olemassa $c \in \mathbb{R}$ siten, että jokaiselle $x \in \mathbb{R}$ pätee $f(x) = cx$. Sijoittamalla yhtälöön (6) x:n paikalle rx, saadaan

$$f(rx) = crx = rcx = rf(x)$$

Oletetaan toiseksi, että funktio f toteuttaa yhtälön (7) kaikilla $r \in \mathbb{R}$ ja kaikilla $x \in \mathbb{R}$, jolloin sijoittamalla (7):ään r:n paikalle x ja x:n paikalle 1 saadaan

$$f(x) = f(x \cdot 1) = xf(1) = f(1)x$$

ja $f(1)$ on määritelmän 2 reaaliluku c. □

Termi lineaarinen tulee siitä, että tällaisen funktion kuvaaja on origon kautta kulkeva suora.

Määritelmästä 1 seuraa välittömästi:

Lause 3: Jokainen lineaarinen funktio $\boldsymbol{f}$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on additiivinen.

Todistus: Jos $c \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ ja $y \in \mathbb{R}$, niin sijoittamalla yhtälöön (6) x:n paikalle $x + y$ saadaan

$$f(x + y) = c(x + y) = cx + cy = f(x) + f(y)$$ □

Mutta onko jokainen additiivinen funktio lineaarinen? Kohdassa 3 osoitetaan, että ei ole. Mutta sitä ennen tutustutaan hieman additiivisen ei-lineaarisen funktion ominaisuuksiin.

2. Additiivisen ei-lineaarisen funktion ominaisuuksia

Lause 4: Jos funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on additiivinen ja ei-lineaarinen, sen kuvaaja on tiheä koko tasossa.

Tässä ”kuvaaja on tiheä koko tasossa” tarkoittaa, että tason $\mathbb{R}^2$ jokaisen pisteen jokaisessa avoimessa ympäristössä on ainakin yksi funktion kuvaajan piste. Vielä täsmällisemmin ilmaistuna: jokaisella tason pisteellä (a, b) ja jokaisella positiivisella reaaliluvulla r on olemassa $x \in \mathbb{R}$ siten, että funktion f kuvaajan pisteen $\big(x, f(x)\big)$ etäisyys pisteestä (a, b)

$$d = \sqrt{(x-a)^2 + (f(x)-b)^2}$$

on pienempi kuin r.

Lauseen 4 todistus: Valitaan mielivaltainen tason piste (a, b) ja mielivaltainen positiivinen reaaliluku r ja oletetaan, että funktio f on additiivinen eli sillä on ominaisuus (1), mutta se ei ole lineaarinen eli sillä ei ole ominaisuutta (6).

Pistettä (a, b) lähellä olevan funktion f kuvaajan pisteen $\big(x, f(x)\big)$ löytämiseksi todetaan aluksi, että kaikille rationaaliluvuille q_1 ja q_2 ja kaikille reaaliluvuille x_1 ja x_2, on tason piste

$$P_{q_1 x_1 q_2 x_2} = \big(q_1 x_1 + q_2 x_2, q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2)\big) \tag{8}$$

funktion f kuvaajan piste, sillä lauseen 1 ja määritelmän 1 mukaan

$$\begin{aligned}\big(q_1 x_1 + q_2 x_2, q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2)\big) &= \big(q_1 x_1 + q_2 x_2, f(q_1 x_1) + f(q_2 x_2)\big)\\ &= \big(q_1 x_1 + q_2 x_2, f(q_1 x_1 + q_2 x_2)\big)\end{aligned}$$

Pitää siis löytää reaaliluvut x_1 ja x_2 sekä rationaaliluvut q_1 ja q_2 siten, että pisteen $P_{q_1 x_1 q_2 x_2}$ x-koordinaatti $q_1 x_1 + q_2 x_2$ on lähellä a:ta ja y-koordinaatti $q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2)$ lähellä b:tä.

Valitaan ensin mielivaltainen $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Koska f ei ole lineaarinen, on määritelmän 2 mukaan jokaiselle $c \in \mathbb{R}$ olemassa $x \in \mathbb{R}$ siten, että $f(x) \neq cx$. Koska $x_1 \neq 0$, voidaan valita $c = f(x_1)/x_1$, jolloin on olemassa $x_2 \in \mathbb{R}$ siten, että

$$f(x_2) \neq \frac{f(x_1)}{x_1} x_2$$

jolloin $x_1 f(x_2) \neq x_2 f(x_1)$ ja

$$x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1) \neq 0 \tag{9}$$

Reaaliluvut x_1 ja x_2 on nyt valittu. Pitää vielä löytää rationaaliluvut q_1 ja q_2, joille pisteen $P_{q_1 x_1 q_2 x_2}$ x-koordinaatti $q_1 x_1 + q_2 x_2$ on lähellä a:ta ja y-koordinaatti $q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2)$ lähellä b:tä. Tässä tarkoituksessa etsitään ensin reaaliluvut x ja y, joille

$$\begin{cases} x x_1 + y x_2 = a \\ x f(x_1) + y f(x_2) = b \end{cases} \tag{10}$$

Kun kerrotaan ylempi yhtälöistä (10) luvulla $f(x_2)$ ja alempi luvulla $-x_2$ ja lasketaan yhtälöt puolittain yhteen, saadaan

$$\begin{cases} f(x_2)\,xx_1 + f(x_2)yx_2 = f(x_2)a \\ -x_2xf(x_1) - x_2yf(x_2) = -x_2b \end{cases}$$

$$x_1f(x_2)x - x_2f(x_1)x = af(x_2) - bx_2$$

$$\big(x_1f(x_2) - x_2f(x_1)\big)x = af(x_2) - bx_2$$

Koska x_1 ja x_2 oli valittu niin, että epäyhtälö (9) pätee, saadaan tästä jakamalla x:n kertoimella

$$x = \frac{af(x_2) - bx_2}{x_1f(x_2) - x_2f(x_1)}$$

Vastaavasti y ratkaistaan kertomalla ylempi yhtälöistä (10) luvulla $-f(x_1)$ ja alempi luvulla x_1, laskemalla yhtälöt puolittain yhteen sekä ratkaisemalla

$$y = \frac{bx_1 - af(x_1)}{x_1f(x_2) - x_2f(x_1)}$$

Näin saadut x ja y eivät kuitenkaan ole välttämättä rationaalilukuja, joten sijoittamalla yhtälöön (8) pisteen $P_{q_1x_1q_2x_2}$ koordinaatteihin q_1:n paikalle x ja q_2:n paikalle y ei aina saada funktion f kuvaajan pistettä. Mutta nyt riittääkin löytää rationaaliluku q_1 niin läheltä x:ää ja rationaaliluku q_2 niin läheltä y:tä, että pisteen $P_{q_1x_1q_2x_2}$ etäisyys pisteestä (a, b) on pienempi kuin alussa valittu mielivaltainen positiivinen reaaliluku r.

Rationaalilukujen joukko on tiheä reaalilukujen joukossa, eli jokaisen reaaliluvun jokaisessa avoimessa ympäristössä on ainakin yksi rationaaliluku. Tämä tarkoittaa, että olipa δ mikä tahansa positiivinen reaaliluku, niin on olemassa rationaaliluku q_1 siten, että $|q_1 - x| < \delta$ ja kun oli valittu $x_1 \neq 0$, niin

$$|q_1 - x||x_1| < \delta|x_1| \tag{11}$$

Tällöin on myös

$$|q_1 - x||f(x_1)| \leq \delta|f(x_1)| \tag{12}$$

Samoin on olemassa rationaaliluku q_2 siten, että $|q_2 - y| < \delta$, jolloin

$$|q_2 - y||x_2| \leq \delta|x_2| \tag{13}$$

ja

$$|q_2 - y||f(x_2)| \leq \delta|f(x_2)| \tag{14}$$

Kolmioepäyhtälönä tunnetun reaalilukujen ominaisuuden mukaan kaikilla $a \in \mathbb{R}$ ja kaikilla $b \in \mathbb{R}$ on $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Yhtälöparin (10) ensimmäistä yhtälöä, kolmioepäyhtälöä ja epäyhtälöitä (11) ja (13) käyttäen saadaan

$$|q_1x_1 + q_2x_2 - a| = |q_1x_1 + q_2x_2 - xx_1 - yx_2| = |(q_1 - x)x_1 + (q_2 - y)x_2|$$

$$\leq |(q_1 - x)x_1| + |(q_2 - y)x_2| = |q_1 - x||x_1| + |q_2 - y||x_2| < \delta|x_1| + \delta|x_2|$$

$$= \delta(|x_1| + |x_2|)$$

Yhtälöparin (10) toista yhtälöä, kolmioepäyhtälöä ja epäyhtälöitä (12) ja (14) käyttäen saadaan

$$|q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2) - b| = |q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2) - x f(x_1) - y f(x_2)| = |(q_1 - x) f(x_1) + (q_2 - y) f(x_2)|$$

$$\leq |(q_1 - x) f(x_1)| + |(q_2 - y) f(x_2)| = |q_1 - x||f(x_1)| + |q_2 - y||f(x_2)| \leq \delta|f(x_1)| + \delta|f(x_2)|$$

$$= \delta(|f(x_1)| + |f(x_2)|)$$

Näin valituilla luvuilla q_1, x_1, q_2 ja x_2 on piste $P_{q_1 x_1 q_2 x_2} = \big(q_1 x_1 + q_2 x_2, q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2)\big)$ funktion f kuvaajan piste. Sen ja pisteen (a, b) välinen etäisyys on

$$d = \sqrt{(q_1 x_1 + q_2 x_2 - a)^2 + (q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2) - b)^2} < \sqrt{\delta^2(|x_1| + |x_2|)^2 + \delta^2(|f(x_1)| + |f(x_2)|)^2}$$

$$= \delta\sqrt{(|x_1| + |x_2|)^2 + (|f(x_1)| + |f(x_2)|)^2}$$

on pienempi kuin edellä valittu pisteen (a, b) avoimen ympäristön mielivaltainen säde $r > 0$, jos

$$\delta \leq \frac{r}{\sqrt{(|x_1| + |x_2|)^2 + (|f(x_1)| + |f(x_2)|)^2}}$$

Lause 4 on näin todistettu. □

On siis osoitettu, että jos funktio on additiivinen, sen kuvaaja on joko origon kautta kulkeva suora tai pistejoukko, joka on tiheä koko tasossa.

Mielenkiintoista on erityisesti se, että tason jokaisen pisteen jokaisesta avoimesta ympäristöstä ei löydy ainoastaan yhtä, vaan itse asiassa äärettömän monta funktion f kuvaajan pistettä. Tämän todistamiseksi tehdään vastaoletus: on olemassa tason piste (a, b) ja sillä r-säteinen avoin ympäristö

$$U\big((a, b), r\big) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < r\right\},$$

jossa on vain äärellinen määrä funktion f kuvaajan pisteitä, pisteet $\big(x_1, f(x_1)\big), \dots, \big(x_n, f(x_n)\big)$. Valitaan piste $(c, d) \in \mathbb{R}^2$, joka ei ole mikään pisteistä $\big(x_1, f(x_1)\big), \dots, \big(x_n, f(x_n)\big)$ ja on etäisyydellä $r/2$ pisteestä (a, b). Seuraavaksi valitaan pisteelle (c, d) avoin ympäristö $U\big((c, d), r_0\big)$, jonka säde r_0 on pienin pisteiden $\big(x_1, f(x_1)\big), \dots, \big(x_n, f(x_n)\big)$ pisteestä (c, d) mitatuista etäisyyksistä ja luvusta $r/2$

$$r_0 = \min\left\{\sqrt{(x_1 - c)^2 + (f(x_1) - d)^2}, \cdots, \sqrt{(x_n - c)^2 + (f(x_n) - d)^2}, r/2\right\},$$

Näin saadaan kokonaan avoimen ympäristön $U\big((a, b), r\big)$ sisällä oleva pisteen (c, d) avoin ympäristö $U\big((c, d), r_0\big)$, jossa ei ole yhtään funktion f kuvaajan pistettä, koska pistettä (c, d) lähin kuvaajan piste on siitä vähintään etäisyydellä r_0.

Lauseesta 4 seuraa heti, että jos yhdelläkin tason pisteellä on avoin ympäristö, johon ei kuulu yhtään additiivisen funktion f kuvaajan pistettä, niin f on lineaarinen. Näin ollen esim. yhdelläkin avoimella välillä ylhäältä (tai alhaalta) rajoitettu additiivinen funktio on lineaarinen. Jos nimittäin on olemassa $M \in \mathbb{R}$ ja avoin väli $]a, b[$ siten, että $f(x) \leq M$ kaikilla $x \in]a, b[$, niin pisteen

$$\left(\frac{a+b}{2}, M+\frac{b-a}{2}\right)$$

$(b-a)/2$-säteisen avoimen ympäristön U jokaiselle pisteelle (x, y) pätee

$$\sqrt{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(y-M-\frac{b-a}{2}\right)^2}<\frac{b-a}{2}$$

joten

$$\left|x-\frac{a+b}{2}\right|<\frac{b-a}{2}$$

$$-\frac{b-a}{2}<x-\frac{a+b}{2}<\frac{b-a}{2}$$

$$-\frac{b-a}{2}+\frac{a+b}{2}<x<\frac{b-a}{2}+\frac{a+b}{2}$$

$$a<x<b$$

ja

$$\left|y-M-\frac{b-a}{2}\right|<\frac{b-a}{2}$$

$$-\frac{b-a}{2}<y-M-\frac{b-a}{2}<\frac{b-a}{2}$$

$$-\frac{b-a}{2}+M+\frac{b-a}{2}<y<\frac{b-a}{2}+M+\frac{b-a}{2}$$

$$M<y<M+b-a$$

Koska siis ympäristön U jokaiselle pisteelle (x, y) pätee $a<x<b$ ja $y>M$, ei ympäristössä U voi olla yhtään funktion f kuvaajan pistettä $(x, f(x))$, sillä $f(x) \leq M$ kaikilla $x \in]a, b[$.

Erityisesti additiivinen funktio on lineaarinen, jos se on jatkuva yhdessäkin pisteessä $x_0 \in \mathbb{R}$. Jatkuvuuden määritelmästä seuraa nimittäin tällöin, että esim. luvulle 1 on olemassa positiivinen reaaliluku δ siten, että kun $|x-x_0|<\delta$, niin $|f(x)-f(x_0)|<1$. Tästä puolestaan seuraa, että avoimella välillä $]x_0-\delta, x_0+\delta[$ on $f(x)-f(x_0)<1$ eli $f(x)<1+f(x_0)$ ja f on siis ylhäältä rajoitettu.

3. Additiivisen ei-lineaarisen funktion olemassaolo

Nyt tiedetään, millaisia additiiviset ei-lineaariset funktiot voivat olla. Mutta onko sellaisia olemassa?

Kysymys palautuu ns. ***valinta-aksioomaan***, joka sanoo, että jos $\mathcal{F}$ on mikä tahansa kokoelma ei-tyhjiä joukkoja, niin voidaan valita joukko S, jossa on täsmälleen yksi alkio jokaisesta kokoelman $\mathcal{F}$ joukosta.

Tällaisen joukon S olemassaolo on selvää ilman valinta-aksioomaakin, jos kokoelmassa $\mathcal{F}$ on ainoastaan äärellinen määrä joukkoja. Esim. jos $\mathcal{F}=\{\{1\},\{2\},\{1,10,495\},\{18,6174\}\}$, voidaan valita joukko

$S = \{1,2,495,18\}$. Valinta-aksioomaa ei tarvita myöskään, jos on olemassa sääntö, jonka mukaisesti valinnat tehdään. Esimerkiksi tällaisesta käy luonnollisten lukujen joukon $\mathbb{N}$ kaikkien osajoukkojen kokoelma $2^{\mathbb{N}}$, kun sääntö on, että jokaisesta osajoukosta valitaan sen pienin luku. Mutta kannattaa huomata, että ainakaan tämä sääntö ei tule kyseeseen, jos $\mathcal{F}$ on reaalilukujen joukon $\mathbb{R}$ kaikkien osajoukkojen kokoelma $2^{\mathbb{R}}$. Tähän kokoelmaan kuuluu nimittäin esim. rationaalilukujen joukko $\mathbb{Q}$, jossa ei ole pienintä lukua.

Oletetaan, että valinta-aksiooma on voimassa. Additiivisen ei-lineaarisen funktion olemassaolon todistamisen kannalta tärkeää on, että yksi valinta-aksiooman seurauksista on

Lause 5: On olemassa reaalilukujen joukon osajoukko $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ siten, että jokainen reaaliluku $\boldsymbol{x}$ voidaan esittää yksikäsitteisellä tavalla äärellisen monen joukkoon $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ kuuluvan luvun $\boldsymbol{x_1}, \cdots, \boldsymbol{x_n}$ rationaalilukukertoimi-sena lineaarikombinaationa, siis muodossa

$$\boldsymbol{x = q_1 x_1 + \cdots + q_n x_n},$$

missä $\{\boldsymbol{q_1}, \cdots, \boldsymbol{q_n}\} \subseteq \mathbb{Q}$ ja $\{\boldsymbol{x_1}, \cdots, \boldsymbol{x_n}\} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{B}}$.

Joukkoa $\mathcal{B}$ kutsutaan reaalilukujen *Hamelin kannaksi* saksalaisen matematiikon Georg Karl Wilhelm Hamelin (12.9.1877 – 4.10.1954) mukaan.

Lauseen 5 todistus menee niin syvälle joukko-opin perusteisiin, että se joudutaan tässä yhteydessä sivuuttamaan.

Kiusallista, mutta samalla erittäin viehättävää on se, että tätä joukkoa $\mathcal{B}$ ei voida konstruoida, joten ei tiedetä, millainen esim. luvun 1 esitys on. Sen verran kuitenkin tiedetään, että luku 0 ei kuulu kantaan, sillä jos se kuuluisi ja esim. luvun 1 esitys kannan $\mathcal{B}$ lukuja käyttäen olisi

$$1 = q_1 x_1 + \cdots + q_n x_n$$

olisi myös

$$1 = q_1 x_1 + \cdots + q_n x_n + c \cdot 0$$

jokaiselle reaaliluvulle c ja eri esityksiä olisi äärettömän monta.

Tiedetään myös, että kannassa $\mathcal{B}$ on vähintään kaksi lukua, sillä jos siinä olisi vain yksi luku, x_1, olisi jokainen reaaliluku muotoa qx_1, missä q on rationaaliluku. Olisi siis oltava esim. $1 = q_1 x_1$ jollekin rationaaliluvulle q_1 ja $\sqrt{2} = q_2 x_1$ jollekin rationaaliluvulle q_2, mistä seuraisi, että

$$\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \frac{q_2 x_1}{q_1 x_1} = \frac{q_2}{q_1}$$

olisi rationaaliluku.

Itse asiassa kanta $\mathcal{B}$ on ylinumeroituvasti ääretön lukujoukko ja sen mahtavuus (kardinaliteetti) on sama kuin reaalilukujen joukon $\mathbb{R}$, eli on olemassa bijektio $g: \mathcal{B} \to \mathbb{R}$.

Oletetaan tästä alkaen, että x:n esityksestä jätetään aina pois kaikki termit, joissa on kertoimena 0. Toisin sanoen, oletetaan, että jos $x \neq 0$ ja $x = q_1 x_1 + \cdots + q_n x_n$, niin $\{q_1, \cdots, q_n\} \subseteq \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

Jos taas $x = 0$ ja $x = q_1x_1 + \cdots + q_nx_n$, niin esityksen yksikäsitteisyyden vuoksi $q_1x_1 + \cdots + q_nx_n = 0$ toteutuu vain, jos $q_1 = \cdots = q_n = 0$, sillä 0:lla on myös esitys $0 = 0x_1 + \cdots + 0x_n$.

Hamelin kantaa käyttäen voidaan nyt todistaa

Lause 6: On olemassa funktio f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joka on additiivinen mutta ei lineaarinen.

Todistus: Valitaan ensin mielivaltainen funktio h: $\mathcal{B} \to \mathbb{R}$ ja sen jälkeen funktio f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seuraavasti

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{jos } x = 0 \\ \\ q_1h(x_1) + \cdots + q_nh(x_n), \text{jos } x \neq 0 \end{cases} \tag{15}$$

missä $x = q_1x_1 + \cdots + q_nx_n, \{q_1, \cdots, q_n\} \subseteq \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ ja $\{x_1, \cdots, x_n\} \subseteq \mathcal{B}$.

Koska x:n esitys $x = q_1x_1 + \cdots + q_nx_n$ on yksikäsitteinen, on myös $f(x)$:n arvo yksikäsitteinen ja f on näin ollen funktio.

Näin määritellylle funktiolle f pätee

$$f(x) = h(x) \tag{16}$$

jokaiselle $x \in \mathcal{B}$. Jos nimittäin $x \in \mathcal{B}$, niin $x \neq 0$ ja koska x:n yksikäsitteinen esitys kannan $\mathcal{B}$ lukujen lineaarikombinaationa on $1x$, niin $f(x) = f(1x) = 1h(x) = h(x)$.

Todistetaan, että funktio f on additiivinen.

Olkoon $x \in \mathbb{R}$ ja $y \in \mathbb{R}$. Jos x:n lineaarikombinaatioesityksessä $x_1, \cdots, x_n$ ovat ne kannan $\mathcal{B}$ luvut, jotka eivät ole y:n esityksessä, $z_1, \cdots, z_m$ ne kannan $\mathcal{B}$ luvut, jotka ovat sekä x:n että y:n esityksessä ja $y_1, \cdots, y_k$ ne kannan $\mathcal{B}$ luvut jotka ovat y:n mutta eivät x:n esityksessä, niin

$$x = q_1x_1 + \cdots + q_nx_n + r_1z_1 + \cdots + r_mz_m$$

$$y = s_1z_1 + \cdots + s_mz_m + t_1y_1 + \cdots + t_ky_k$$

jolloin

$$x + y = q_1x_1 + \cdots + q_nx_n + r_1z_1 + \cdots + r_mz_m + s_1z_1 + \cdots + s_mz_m + t_1y_1 + \cdots + t_ky_k$$

$$= q_1x_1 + \cdots + q_nx_n + (r_1 + s_1)z_1 + \cdots + (r_m + s_m)z_m + t_1y_1 + \cdots + t_ky_k$$

Tämä on $(x + y)$:n yksikäsitteinen esitys kannan $\mathcal{B}$ lukujen lineaarikombinaationa, joten ominaisuuden (15) mukaan

$$f(x + y) = q_1h(x_1) + \cdots + q_nh(x_n) + (r_1+s_1)h(z_1) + \cdots + (r_m+s_m)h(z_m) + t_1h(y_1) + \cdots + t_kh(y_k)$$

$$= q_1h(x_1) + \cdots + q_nh(x_n) + r_1h(z_1) + \cdots + r_mh(z_m)$$

$$+ s_1h(z_1) + \cdots + s_mh(z_m) + t_1h(y_1) + \cdots + t_kh(y_k) = f(x) + f(y)$$

Todistetaan nyt, että niiden funktioiden joukossa, joilla on ominaisuus (15), on ei-lineaarinen funktio.

Kuten edellä osoitettiin, on kannassa $\mathcal{B}$ vähintään kaksi lukua, olkoot ne x_1 ja x_2. Jotta f olisi lineaarinen, olisi määritelmän 2 mukaan oltava olemassa $c \in \mathbb{R}$ siten, että $f(x) = cx$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Siis $f(x_1) = cx_1$ ja $f(x_2) = cx_2$ jolloin

$$c = \frac{f(x_1)}{x_1} = \frac{f(x_2)}{x_2}$$

sillä kannan $\mathcal{B}$ lukuina $x_1 \neq 0$ ja $x_2 \neq 0$. Tällöin on yhtälön (16) mukaan

$$\frac{h(x_1)}{x_1} = \frac{f(x_1)}{x_1} = \frac{f(x_2)}{x_2} = \frac{h(x_2)}{x_2}$$

Tämä tarkoittaa, että f on lineaarinen, vain jos

$$h(x_2) = \frac{h(x_1)}{x_1} x_2$$

joten, jos valitaan

$$h(x_2) \neq \frac{h(x_1)}{x_1} x_2$$

saadaan ei-lineaarinen funktio f, jolla on ominaisuus (15) ja joka on näin ollen additiivinen. ▯

Tästä voidaan päätellä kaksi mielenkiintoista asiaa.

Ensiksi se, että pienikin $h(x_2)$:n poikkeama luvusta $x_2\, h(x_1)/x_1$ aiheuttaa sen, että f muuttuu lineaarisesta ei-lineaariseksi. Koska f on additiivinen, tämä tarkoittaa lauseen 4 mukaan, että funktion f kuvaaja hajoaa origon kautta kulkevasta suorasta pistejoukoksi, joka on tiheä koko tasossa.

Toiseksi se, että kun on vain yksi $h(x_2)$:n arvo, jolla f on lineaarinen ja äärettömän monta, joilla ei ole, lineaarisuus on harvinaista additiivisten funktioiden joukossa. Jopa niin harvinaisia, että umpimähkään valittu additiivinen funktio on lineaarinen todennäköisyydellä 0.

Siitä, millaisia additiiviset ei-lineaariset funktiot ovat, saa jonkinlaisen käsityksen, jos alkaa piirtää sellaisen kuvaajaa. Tällöinhän on piirrettävä jokaiselle pystysuoralle suoralle yksi kuvaajan piste ja jokaiseen sen avoimeen ympäristöön äärettömän monta kuvaajan pistettä.

Ei siis ole ihme, että additiivisia ei-lineaarisia funktioita kutsutaan joskus ”hirviöfunktioiksi” (”monster functions”).

4. Lähteet

1 Augustin-Louis Cauchy: https://en.wikipedia.org/wiki/Augustin-Louis_Cauchy [25.11.2023]
2 Lauseen 4 todistuksen periaate: https://en.wikipedia.org/wiki/Cauchy%27s_functional_equation [25.11.2023]
3 Georg Karl Wilhelm Hamel: https://en.wikipedia.org/wiki/Georg_Hamel [25.11.2023]
4 Hamelin kannan olemassaolo ja kardinaliteetti: http://thales.doa.fmph.uniba.sk/sleziak/texty/rozne/pozn/tm/hamel.pdf [25.11.2023]
5 Additiivisen ei-lineaarisen funktion muodostamisen periaate: https://en.wikipedia.org/wiki/Cauchy%27s_functional_equation [25.11.2023]

5. Kiitokset

Lämpimät kiitokset Markus Pantsarille, joka on perehtynyt kirjoitukseeni ja antanut arvokkaita neuvoja sekä tekstin sisällön että luettavuuden suhteen. Kiitän myös Merja Pantsaria kärsivällisyydestä, kannustuksesta ja kommenteista, joita hän on antanut kirjoituksestani sen eri vaiheissa. Kiitos myös Teuvo Laurinollille rohkaisevista sanoista ja kiitos Matematiikkalehti Solmun päätoimittajalle Anne-Maria Ernvall-Hytöselle kirjoitukseni julkaisemisesta ja julkaisukuntoon saattamisesta.